507

DE

# INCLINATIONIS VIRIUM MAGNETICARUM MENSURA

SCRIPSIT

Vi

ADOLPHUS ERMAN, Dr.

PHYS. ET GEOGR. PROF. IN UNIVERS. LITT. FRIDER. GUIL.

BEROLINI,

TYPIS NIETACKIANIS.

# DE INCLINATIONIS MAGNETICAE MENSURA.

Ad indagandas aequilibrii conditiones in quocunque corpore circa axem fixum mobili, nil aliud opus esse patet quam ut, pro singulo ejus puncto, vires metiamur omnes quae id in orbita sua, h. e. in plano ad axem fixum normali et per ipsum id punctum transeunti, agunt, et ita quidem ut si positivas habeamus vires quae corporis puncta dextrorsum vertunt, pro negativis accipiamus quae rotationem contrariam efficiunt. Prodibit enim e virium conflictu aequilibrium, quoties summa terminorum qui hoc modo pro omnibus punctis formantur, fiat nihilo aequalis. Simul autem eadem hac computatione, innotescet aequatio ad definiendum motum oscillatorium quo corpus illud, ex aequilibrii positione deflexum, ad eandem redit, quippe qui motus ita comparatus erit ut ipsa quam diximus terminorum summa, pro quovis infinite parvo temporis momento sumpta, aequetur summae mutationum quae, per ipsum id tempus, in motu omnium corporis punctorum accidunt.

Quae ut algebraica notatione exhibeamus axiomata, rectas effingimus duas et ad axem fixum et inter se normales, in quibus singulatim metiemur coordinatas litteris $X$ et $Y$ insignitas. Ponimus insuper in corporis nostri punctum cui coordinatae sint $x$ et $y$, agere vim ad angulos $\alpha$ et $\beta$ cum partibus positivis axium ipsorum $X$ et $Y$, ejusque effectum in unitatem voluminis prope punctum $(xy)$, littera $f$ exhibemus, tunc ipsa quam modo diximus aequilibrii conditio, aequatione referetur hacce:

$$\int^3 [f(x\cos\beta - y\cos\alpha)]\, dx.dy.dz = o \qquad \text{I.}$$

Ubi integratio triplex secundum $x$, $y$, $z$ per totum corpus extendenda signumque [ ], ita accipiendum est ut pro singulis quibus omne punctum excitatur viribus, termini formentur descripto in aequatione I. similes.

Eodem modo fit, per supra dictum axioma secundum, aequatio ad motum oscillatorium:

$$dt\int^3 [f(x\cos\beta - y\cos\alpha)].\, dx.dy.dz = d\omega.\int^3 (x^2+y^2)\, dx.dy.dz. \qquad \text{II.}$$

ubi $t$ tempus praeteritum ab initio motus ad id quod respicimus momentum, $\omega$ velocitatem angularem qua corporis puncta eodem temporis momento feruntur, reliquae autem litterae signaque idem quod supra valent.

Ut vero harum aequationum ope, institutis circa aequilibrium vel motum cujusvis corporis observationibus, cognoscamus virium quae in id agunt directiones et intensitates, reliquum est loco angulorum $\alpha$ et $\beta$ et coordinatarum $x$ et $y$, quantitates adhibere quae vel ipsae observatione directa deprehendi possint, vel saltem inter eas sint ad quarum computationem observationes instituuntur. — Dum igitur convertimur a generali hac

corporum contemplatione ad ampliorem de **inclinatorio** disquisitionem, reputandum erit inprimis quae se in ejusmodi instrumento quantitates directae observationi praebeant; antea autem haud supervacaneum videtur monere, me commentariolum cujus hic particulam edo, eo potissimum consilio composuisse ut quas in itinere *περικόσμιῳ* institui observationes magneticas, rectius in examen vocarem. Quare quae hic de inclinatorio omnino dicere videbor, de ea hujus instrumenti forma accepta velim, quam Gambejus invenit et qua Parisini hujus artificis nomen inter physicos haud immerito celebratur; hujusmodi enim erat quo in peregrinatione utebar terra marique instrumentum.

Redacto ideo, libellae et cochlearum ope, ad normalem positionem axe, cui verticalis inclinatorii limbus superfixus, in hoc ipso nil aliud colligimus nisi angulum inter aliquam in ipsa acu lineam, quam collimationis lineam in posterum nuncupabo, interque alterum ex radiis hujus limbi qui apposita ciphra distinguuntur. Sit nobis $I$ signum valoris hujus anguli, cumque, donec contraria monebo, ab illa circuli ciphra incipiendo numerabo quam oculus in centro inclinatorii, spectaret ad sinistram notae cujusdam in altera cuspide axis circa quem volvitur acus. Dein vero quantum intra duas observationes mutetur notae quam dixi in acus axe azimut, in horizontali apparatus nostri circulo accurate aestimare licebit et metiri denique adhibito chronometro tempus quo acus, qualicunque axis sui positione, oscillationem integram absolvit. Sit $A$ numerus quem ad indicem sive alhidadam circuli horizontalis deprehenderemus dum notata axis versorii cuspis septentrionem magneticum spectaret, et $a$ valor ejusdem quantitatis dum ad limbum verticalem, angulum $I$ observamus, sitque ideo pro ipsa hac observatione, notae in acus axe versorio, a septentrione magnetico dextrorsum numeratum, azimut $= a - A$. Ejusdem notae altitudinem h. e. ab horizonte per centrum inclinatorii distantiam angularem, littera $h$ designabo. — Eligamus insuper ad metiendas coordinatas $X$ quam diximus collimationis lineam, ideoque ad coordinatas $Y$ metiendas rectam normalem ad hanc et ad acus axem versorium; sint porro $D$, $C$ et $Y$ puncta in quibus sphaera coelestis seu centro instrumenti cum radio infinito circumscripta, deinceps secatur axe versorio, collimationis linea, rectaque ad mensuram coordinatarum $Y$ inservienti, continuata scilicet harum unaquaque ab inclinatorii centro, eo quo positivae numerantur coordinatae; sitque $K$ ejusdem sphaerae punctum quorsum una quibus quodlibet acus punctum excitatur virium tendit, et habebitur: $\alpha = KC$, $\beta = KY$. Agunt autem in omne acus punctum vires magneticae borealis, australisque et gravitatis insuper vis, pro quibus omnibus non ipsi arcus $KC$ et $KY$ dantur desideranturve, sed arcus $KZ$, $KN$, $KO$ designantibus nimirum pro loco observationis: $Z$ zenitale punctum, $N$ vero et $O$ horizontalis circuli sectiones per meridiani magnetici partem borealem, perque orientalem primi quem ajunt magnetici verticalis.

Universe proinde foret, secundum evidentem inter descripta nobis sphaerae coelestis puncta nexum geometricum:

$$\cos\alpha = \cos KZ.\ \cos CZ + \cos KN.\ \cos CN + \cos KO.\ \cos CO.$$
$$\cos\beta = \cos KZ.\ \cos YZ + \cos KN.\ \cos YN + \cos KO.\ \cos YO.$$

Sed quum pro utraque vi magnetica sint:

$$KO = 90^\circ \quad KZ = 90^\circ - KN$$

et pro gravitate: $KO = 90^\circ \quad KZ = 180^\circ \quad KN = -90^\circ$

unde itidem: $KZ = 90^\circ - KN$, patet pro singula harum virium. solum $KN$ in com-

puto servandum et simpliciore symbolo ut $KN = n$ designandum esse, unde etiam pro singula earum habebimus:

$$\cos \alpha = \sin n . \cos CZ + \cos n . \cos CN$$
$$\cos \beta = \sin n . \cos YZ + \cos n . \cos YN$$

Tunc vero in explicitis demum et omnino reductis aequationibus loco ipsius $n$ discreti tres adhibendi valores quibus singulae vires distinguuntur.

Quibus ita dispositis ad nanciscendas pro acu inclinatoria aequationes quarum supra sub I. et II. adscripsimus symbola generalia, id denuo superesse videmus ut et arcus $CZ$, $CN$, $YZ$, $YN$ exhibeantur quantitatibus aut observatione ex ipso instrumento colligendis aut supputatione investigandis. Ducto ideo per $D$ et $Z$ h. e. per axis versorii in coelum projectionem perque zenitale punctum circulo maximo, sit ejusdem cum circulo maximo $YC$ seu cum verticali limbo ad coelum usque continuato, intersectio, punctum $P$, quod polum inclinatorii nuncupabimus et a verticalis limbi ciphra in coelum projecta, arcu $90° + c$ distare statuemus. Quo facto ex descripta hactenus quinque punctorum in sphaera coelesti positione patet esse:

$$ZP = h \qquad ZPC = 90° \qquad CP = -90° + I + c$$
$$CY = 90° \qquad ZN = 90° \qquad NZP = 180° - (a - A)$$

et inde:

| | |
|---|---|
| $\cos CZ = -\cos h . \sin(I + c)$ | $\cos YZ = \cos h \cos(I + c)$ |
| $\cos CN = -\sin CZ \cos[(a - A) + CZP]$ | $\cos YN = -\sin YZ . \cos[(a - A) + YZP]$ |
| vel ob: $\sin CZ \sin CZP = \cos(I + c)$ | et ob: $\sin YZ . \sin YZP = \sin(I + c)$ |
| $\sin CZ \cos CZP = -\sin(I + c) \sin h$ | $\sin YZ . \cos YZP = \cos(I + c) \sin h$ |
| $\cos CN = \cos(I + c) \sin(a - A) + \sin(I + c) \sin h \cos(a - A)$ | $\cos YN = \sin(I + c) \sin(a - A) - \cos(I + c) \sin h \cos(a - A)$ |

Quibus in supra adscriptos valores ipsorum $\cos \alpha$ et $\cos \beta$ substitutis, pro omni quae in acum nostram agit vi, habetur:

$$f(x \cos\beta - y \cos\alpha) = f \Big[ \sin n . \cos h [x \cos(I+c) + y \sin(I+c)] - \cos n [x(\sin h \cos(a-A) \cos(I+c) - \sin(a-A) \sin(I+c)) + y(\sin h \cos(a-A) \sin(I+c) + \sin(a-A) \cos(I+c))] \Big]$$

Hic tandem pro vi magnetica boreali $n = i$ $f = f$
pro vi magnetica australi $n = i + 180°$ $f = f'$
et pro gravitate $n = -90°$ $f = g\delta$

substituendo, ubi $\delta$ acus densitatem ad punctum $(xy)$ designat, aequatio generalis I., in sequentem abit conditionem pro aequilibrio acus magneticae cujus notatae axis cuspidi azimut $= a - A$:

$$\int^3 dx.dy.dz \Big[ (f - f') \sin i \cos h [x \cos(I+c) + y \sin(I+c)] - (f - f') \cos i [x(\sin h \cos(a-A) \cos(I+c) - \sin(a-A) \sin(I+c)) + y(\sin h \cos(a-A) \sin(I+c) + \sin(a-A) \cos(I+c))] - g\delta \cos h [x \cos(I+c) + y \sin(I+c)] \Big] = o$$

in qua ob virium magneticarum parallelismum, angulus $i$ pro omnibus punctis sibi constans, et proinde $f f' \delta x y$ et $z$ solae variabiles supersunt. Sumendo autem:

$$\int^3 dx.dy.dz(f - f')x = \mu(X - X')$$
$$\int^3 dx.dy.dz(f - f')y = \mu(Y - Y')$$
$$\int^3 dx.dy.dz . g\delta . x = MX$$
$$\int^3 dx.dy.dz \, g\delta . y = MY$$

erunt: $X$ et $Y$ coordinatae poli acus magneticae septentrionalis
$X'$ et $Y'$ » » » » australis .
$\mu$ productum e vi magnetica terrestri et summa virium quae in uno alteroque polo congestae habendae sunt,
$X_{,}$ et $Y_{,}$ coordinatae centri gravitatis ut et $M$ pondus acus,

et si jam insuper rectae quae polos jungit longitudinem per $\varkappa$ et angulum quem cum collimationis linea intercipit per $K$, ut et per $p$ et $P$ distantiam centri gravitatis ab axe versorio et angulum hujus perpendiculi cum collimationis linea designamus ita ut fiat:

$$X - X' = \varkappa \cos K \qquad X_{,} = p \cos P$$
$$Y - Y' = -\varkappa \sin K \qquad Y_{,} = -p \sin P$$

et praeterea scribimus $\frac{Mp}{\mu\varkappa} = k$,

prodibit, ad aequilibrium acus inclinatoriae pertinens aequatio explicita haecce:

$$\cos(I+c+K)[\sin i \cos h - \cos i \sin h \cos(a-A)] + \sin(I+c+K)\cos i \sin(a-A) - k\cos h \cos(I+c+P) = o \qquad (A.)$$

Porro autem obtinetur eadem substitutione in aequationem II, conditio motus oscillatorii ejusdem acus:

$$dt\Big[\mu\varkappa\Big(\cos(\vartheta+c+K)[\sin i\cos h - \cos i \sin h\cos(a-A)] + \sin(\vartheta+c+K)\cos i\sin(a-A)\Big) - Mp\cos h\cos(\vartheta+c+P)\Big] = d\omega \int dx.dy.dz\, \delta.(x^2+y^2) \qquad (B.)$$

ubi $\vartheta$ valorem ipsius $I$ pro eo temporis momento indicat, quo velocitas angularis $= \omega$.

Quibus rite absolutis fingamus alicubi terrarum ad inveniendam inclinationem virium magneticarum seu valorem ipsius $i$, observasse aliquem ut plerumque fieri solet,

ad indicem circuli horizontalis $a = a$ simulque ad verticalem $I = 90°$
tum $a = a'$ » » » $I = 90°$
$a = \frac{a+a'}{2}$ » » » $I = I$
$a = \frac{a+a'}{2} + 180°$ » » » $I = I'$

eritque per substitutionem horum valorum in (A):

$$\left.\begin{aligned}
&-\sin(c+K)\Big(\sin i\cos h - \cos i \sin h.\cos(a-A)\Big) + \cos(c+K)\cos i \sin(a-A) + k\cos h.\sin(c+P) = o\\
&-\sin(c+K)\Big(\sin i\cos h - \cos i \sin h.\cos(a'-A)\Big) + \cos(c+K)\cos i \sin(a'-A) + k\cos h.\sin(c+P) = o\\
&\cos(I+c+K)\Big(\sin i\cos h - \cos i\sin h\cos(\tfrac{a+a'}{2}-A)\Big) + \sin(I+c+K)\cos i\sin(\tfrac{a+a'}{2}-A) - k\cos h\cos(I+c+P) = o\\
&\cos(I'+c+K)\Big(\sin i\cos h + \cos i\sin h\cos(\tfrac{a+a'}{2}-A)\Big) - \sin(I'+c+K)\cos i\sin(\tfrac{a+a'}{2}-A) - k\cos h\cos(I'+c+P) = o
\end{aligned}\right\}(1)$$

Ut his ad propositum nostrum utamur aequationibus, exterminemus primum ex iis incognitam $A$. Subducendo vero secundam a prima obtinetur:

$$\cot\left(\frac{a+a'}{2} - A\right) = \operatorname{tg}(c+K)\sin h.$$

et inde: $\sin\left(\frac{a+a'}{2} - A\right) = \frac{\mp 1}{[1+\operatorname{tg}^2(c+K)\sin^2 h]^{\frac{1}{2}}}$, $\cos\left(\frac{a+a'}{2} - A\right) = \frac{\mp \operatorname{tg}(c+K)\sin h}{[1+\operatorname{tg}^2(c+K)\sin^2 h]^{\frac{1}{2}}}$

ubi signa superiora accipienda sunt quoties in observatione $I = I$, notatae axis versorii cuspis in occidentali horizontis quadrante fuerit. In iis quae sequuntur litterarum vim semper hoc modo definitam volui. — Dum igitur quos modo adscripsimus valores in systematis (1) aequationem tertiam et quartam substituimus, reputandum erit, ipsum $\sin\left(\frac{a+a'}{2} - A\right)$ ab unitate negativa differre tantum termino quarti ordinis secundum parvas quantitates $(c+K)$ et $h$.

atque idcirco in posterum semper, prout longe extra limites quibus observationum subtilitas circumscribitur, negligendi. Item dum sit: $\cos\left(\frac{a+a'}{2}-A\right)=-\operatorname{tg}(c+K)\sin h+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^3(c+K)\sin^3 h..$, patet, substitutionem hujus cosinus in tertiam et quartam, ubi semper accedit ei factor $\sin h$, non nisi terminos tertii ordinis secundum quantitates parvas $(c+K)$ et $h$ efficere, eosque conspicui effectus ducta ratione, plane nullos esse habendos *). Quare ea de qua nunc agitur substitutione supremae systematis (1) aequationes plane eandem induunt formam ac si superstructae essent observationibus pro quibus axis versorius quam accuratissime in primo quem ajunt magnetico verticali, sive $\frac{a+a'}{2}-A=270°$ fuisset. Substituto ergo insuper $\cos h=1-2\sin^2\frac{h}{2}$, et considerando: $k\cos h$ ab ipso $k$ tantum termino parvo tertii ordinis differre et: $2\sin^2\frac{h}{2}\cos(I+c+K)\sin i$. dum proxime aequetur $\sin^2\frac{h}{2}\sin 2i$, ideoque pro $i=45°$ ubi maximum suum assequitur, tamen non nisi ipsi $\frac{h^2}{13751}$ aequipollere, videbis fore ut, dummodo $I$ et $I'$, ex instrumento collectae sint, in quo antea $h<10$ minutis primis redditum, ad eas omni quo par est rigore pertineant simpliciores hae aequationum superiorum formae, nempe:

$$\sin(i-I-c-K)-k\cos(I+c+P)=o$$
$$\sin(i+I'+c+K)-k\cos(I'+c+P)=o$$

Facillimo autem negotio loco singularum observationum ad $I$ et $I'$, binas institues inter se eo differentes, quod pro altera $c=+c$ pro altera $c=-c$ sit; ad quam scilicet differentiam promovendam, sufficit ut primo iis omnino modis quos hucusque descripsi colligas ipsos $I$ et $I'$, dein vero singulam observationem repetas, circulo verticali rotatione dimidia converso, conversoque simul axe versorio in achatinis quibus nititur basibus. Infra ergo litteras $I$ et $I'$ jam pro mediis arithmeticis accipe binarum talium observationum, atque hanc ob causam scribere licet:

$$\sin(i-I-K)-k\cos(I+P)=o$$
$$\sin(i+I'+K)-k\cos(I'+P)=o$$

haec enim eliciuntur ex systematis (1) aequationibus supremis, substituendo deinceps in unaquaque $c=+c$, et $c=-c$, et addendo quae ex utroque efficiuntur, adhibitis simul et $\frac{a+a'}{2}-A=270°$ et caeteris quae hactenus expedivimus compendiis.

Jam vero, per aptam ad id corporis magnetici in acum obductionem, transposita polorum ejus vi, observationibus eruantur anguli $I''$ et $I'''$ iisdem uterque conditionibus quibus deinceps determinavimus angulos $I$ et $I'$. Ad connectendos novos hosce numeros cum quaesito $i$, supremas quas adscripsimus aequationes iterum valebunt, modo in ipsis:

$$180°+K \text{ pro } K$$
$$\text{et } k' \text{ scribatur pro } k.$$

Illud enim ob inversionem polorum requiritur, hoc vero quia ipsum $k=\frac{Mp}{\mu x}$ mutabitur, si forte, nova magnetica inductione, virium in utroque polo congestarum intensitas $\mu$ in aliam $\mu'$ abierit. Habemus igitur praeter eas quas modo adscripsimus, novas aequationes:

---

*) Ut sint nempe $(c+K)$ et $h$ uterque ad 50 minutas primas, quod certo nunquam accidet, tamen terminus quam diximus tertii ordinis haud ultra 0,01 minutae primae in colligendo inclinationis angulo $I$, aequipollebit. Ex disquisitionibus autem quos circa valores ipsorum $h$ et $K$ in apparatu Gambejano institui sequitur terminum istum vix nonagesimam talis erroris partem, seu 0,07 minutae secundae in observando angulo $I$, aequare.

$$\sin(i - I'' - K) + k' \cos(I'' + P) = o$$
$$\sin(i + I''' + K) + k' \cos(I''' + P) = o$$

Cum autem inclinatorii Gambejani circulo verticali numeri eo ordine appositi sunt, ut loco ipsorum $I'$ et $I'''$ anguli $180° - I'$ et $180° - I'''$ obtineantur, aequationes proximae et supremae nonnisi eatenus mutatae ad ipsos ex instrumento collectos numeros pertinebunt. Substitutis autem $180° - I'$ pro $I'$ et $180° - I'''$ pro $I'''$ prodeunt tandem ad computandam veram inclinationem $i$, ex directe cognitis $I\,I'\,I''\,I'''$ aequationes:

$$\left.\begin{aligned} \sin(i - I - K) - k\cos(I + P) &= o \\ \sin(i - I' + K) - k\cos(I' - P) &= o \\ \sin(i - I'' - K) + k'\cos(I'' + P) &= o \\ \sin(i - I''' + K) + k'\cos(I''' - P) &= o \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2.)$$

Verumtamen et nunc non exigua quapiam difficultate laborare videmur, quia angulum $i$ in quatuor aequationibus cum totidem aliis incognitis $K$, $k$, $k'$ et $P$ connexum, non nisi neglecta ex his aliqua vel aliquarum combinatione, expediendum esse liquido constat. Patet sane et alia via, qua ingressi aequationum systemate (2) plene uteremur. Suppositionem dico, dum pluries repetita inductione polos acus invertemus, quantitates $i$, $P$ et $K$ adeo prorsus invariabiles manere, ut hucusque post singulam polorum conversionem concessimus. Tunc enim, peractis post quamvis conversionem observationibus, quales supra pro prima acus conditione descriptae, et formando cum binis quibusque novis valoribus anguli $I$ cumque novo signo pro ipso $k$, duos quos convenit systematis (2) aequationes, assequeris inter incognitas 6, 7 vel omnino $n+4$, aequationes 6, 8 vel omnino $2n+2$, prout interea acus polos bis, ter vel omnino $n$ies inverteris. Eadem imo concessione, rem ita instituemus ut aequationum numerus, numerum incognitarum longius adeo superet; siquidem metientes et dum prima servatur acus conditio et post quamque polorum conversionem, praeter angulos $I$, tempora quoque bina, quibus utraque ad meridianum normali axis sui positione, oscillationem absolvit. Nam quum ex pleniore formulae B (in pagina 6) disquisitione tempus quo acus oscillationem absolvit, servatis iisdem quibus pro observationibus staticis et polorum et axis sui positionibus, ab iisdem quatuor constantibus pendere prodeat, qua anguli $I$, et ab u n a tantum praeterea, invariabili pro omnibus eadem acu absolutis oscillationibus, quantitate, patet fore ut jam inter incognitas 6, 7 aut omnino $n+5$, aequationes exstent 8, 12 aut omnino $4n+4$ prout polos semel bis aut omnino $n$ies converteris. Verum enimvero quem ex tali observationum adparatu fructum capere videmur: ut angulum $i$ determinemus nullius quantitatis parvo licet sed tamen haud negando effectu neglecto, et habito insuper ad fortuitos observationum errores secundum probabilitatis leges respectu, is speciosus evidenter quin imo fallax erit quoties quantitates $i$, $P$ et $K$ ab ea quam supposuimus constantia, tamen recederint. Quare jam missam facimus hanc observandi methodum et satagimus afferre nos quam pereanta ejusdem applicatione ad instrumentum de quo hic praecipue agitur Gambejanum invenisse

1) angulum $K$ tribus minutis primis minorem

et 2) saepius repetita polorum conversione quantitates $k$ et $k'$ non ultra $\frac{1}{27}$ medii earum valoris inter se diversas.

Hac notione ab experientia petita revertimur ad quem supra dixi observationum ordinem, quo nempe, singulo terrae loco, per bina quae ad $I = 90°$ pertinent, circuli horizontalis

indicia, et per octo praeterea acus inclinationes quae indiciis azimutalibus $\frac{a+a'}{2}$ et $180°+\frac{a+a'}{2}$ conveniunt, nil aliud acquiritur nisi ad aequationum systema (2) semel formandum necessarii anguli $I$, $I'$, $I''$ et $I'''$. Dum igitur ut supra diximus in eruenda e talibus observationibus virium magneticarum inclinatione, ad negligendum parvulae cujusdam quantitatis effectum cogimur, duplex se prae ceteris commendat id faciendi ratio. Statuendo scilicet aut axis magnetici cum collimationis linea congruentiam quae per $K=o$ exhibetur, aut aequalitatem virium in acu pro utroque polorum in ea situ sive $k=k'$. Quare id solum superesse videmus ut deinceps expediantur computandi regulae pro alterutra harum suppositionum valentes, simulque algebraice exhibeatur error quo quaesitae quantitatis valorem afficimus, dum ad datas observationes unam alteramve earum congruamque ei computandi regulam adhibemus. Tunc enim in datis observationibus nunquam haerentes, reapse dijudicabimus utra methodo verisimilior inclinationis valor derivetur, et quis in eo restet probabilis error.

Sint ergo $f f' f'' f'''$ parvuli arcus quibus apparentes ipsorum $I I' I'' I'''$ valores a veris superantur, tunc in aequationum systemate (2), loco $I I'$ etc. usurpanda esse $I+f, I'+f'$ etc. patet. Scribendo vero $\alpha=K+f$ $\beta=-K+f'$ $\gamma=K+f''$ $\delta=-K+f'''$ et substitutione in (2) facta, dividendo differentiam primae et secundae hujus systematis aequationis, per ipsarum summam, ut et itidem tractando tertiam et quartam, nancisceris:

$$\mathrm{tg}(P-K)=\frac{\cot(I+\alpha)-\cot(I'+\beta)}{\cot(I+\alpha)+\cot(I'+\beta)-2\cot i}=\frac{B'}{A'-2\cot i}$$

$$\mathrm{tg}\,(P-K)=\frac{\cot(I''+\gamma)-\cot(I'''+\delta)}{\cot(I''+\gamma)+\cot(I'''+\delta)-2\cot i}=\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{A}'-2\cot i}$$

ubi simplici littera quaeque cotangentium summa et differentia designatur.

Sequitur inde: $$\mathrm{tg}\,i=2.\frac{B'-\mathfrak{B}'}{B'\mathfrak{A}'-\mathfrak{B}'A'}$$

et quoties erit $i>45°$, et angulorum $I \ldots I'''$ nullus magis quam 4 gradibus ab eorum medio arithmetico recedens, sequente calculi compendio commodo utemur:

ponendo nempe: $\frac{I+I'+I''+I'''}{4}=i'$, $I=i'+a$ $I'=i'+b$ $I''=i'+c$ $I'''=i'+d$

$$a+\alpha=a' \quad b+\beta=b' \quad c+\gamma=c' \quad d+\delta=d'$$

erit $i=i'+u(1-v\cot i'\sin 1'+2u.\mathrm{cosec}.2i'\sin 1'+\ldots)$

ubi $$u=\frac{a'd'-b'c'}{(a'-b')-(c'-d')} \qquad v=\frac{(a'^2-b'^2)-(c'^2-d'^2)}{(a'-b')-(c'-d')},$$

Quocirca pro ea quam diximus conditione ($i>45$ $I-i'<4°$ etc.) sine ullo conspicuo errore fit:

$$i=i'+u.$$

Secretis ideo quantitatum $a' \ldots . d'$ partibus cognitis ab incognitis eorum additamentis $K, f \ldots f'''$ ad regulam adducimur hanc:

Inclinationi virium magneticarum computatae vel ad formulam:

$$\mathrm{tg}\,i=2.\frac{B-\mathfrak{B}}{B\mathfrak{A}-\mathfrak{B}A} \quad \text{ubi} \quad \begin{matrix} A \\ B \end{matrix}=\cot I\pm\cot I' \quad \begin{matrix} \mathfrak{A} \\ \mathfrak{B} \end{matrix}=\cot I''\pm\cot I''' \qquad (3)$$

vel ad aequipollentem ei pro $i>45°$ et acu quae levi tantum gravitatis momento incitatur:

$$i = i' + \frac{ad-bc}{(a-b)-(c-d)} \quad \text{ubi} \quad \begin{matrix} i' = \frac{I+I'+I''+I'''}{4} \\ a = I - i' \quad c = I'' - i' \\ b = I' - i' \quad d = I''' - i' \end{matrix} \qquad (4)$$

addendam esse, pendentem ab incognitis plerumque quantitatibus correctionem:

$$\frac{f+f'+f''+f'''}{4} + \left(K + \frac{f-f'+f''-f'''}{4}\right) \text{coticot} P \qquad (5)$$

Qua adjutus expressione, aestimato antea angulo $P$ secundum supra adscriptam ejus enuntiationem, pro qualibet data observatione aestimabis errorem in computanda inclinatione timendum eumque tandem cum errore conferas ex altera suppositione $k = k'$ metuendum.

Qua nempe admissa, aequationes (2) transeunt in:

$$o = \sin K.\cos(I-i) + \cos K.\sin(I-i) + k\cos P.\cos I - k\sin P.\sin I$$
$$o = \sin K.\cos(I'-i) - \cos K.\sin(I'-i) - k\cos P.\cos I' - k\sin P.\sin I'$$
$$o = \sin K.\cos(I''-i) + \cos K.\sin(I''-i) - k\cos P.\cos I'' + k\sin P.\sin I''$$
$$o = \sin K.\cos(I'''-i) - \cos K.\sin(I'''-i) + k\cos P.\cos I''' + k\sin P.\sin I'''$$

Ad exterminandas ex iis incognitas tres ducas deinceps:

primam in: $\sin(I'''+I'')\sin(I'-i)+\sin(I'''-I')\sin(I''-i)+\sin(I''+I')\sin(I'''-i)$

secundam in: $\sin(I'''+I'')\sin(I-i)+\sin(I''+I)\sin(I'''-i)+\sin(I''-I)\sin(I'''-i)$

tertiam in: $-\sin(I'''-I')\sin(I-i)+\sin(I'''+I)\sin(I'-i)+\sin(I'+I)\sin(I'''-i)$

quartam in: $\sin(I''+I')\sin(I-i)-\sin(I''-I)\sin(I'-i)+\sin(I'+I)\sin(I''-i)$

addasque producta. In prodeunte tunc aequatione quum summa terminorum in $\cos K$, in $k\cos P$ et in $k\sin P$ sigillatim fiant nihilo aequales, pro summa terminorum in $\sin K$ idem valet et habetur inde:

$$o = \sin(I'''+I'')\sin(I'+I-2i)+\sin(I'+I)\sin(I'''+I''-2i)+\sin(I''+I')\sin(I'''+I-2i)$$
$$+\sin(I'''+I)+\sin(I''+I'-2i)+2\sin(I'''-I')\sin(I''-I)$$

ex qua denique ad supputandum $i$, regula derivatur haecce:

$$\left.\begin{matrix} \text{Ponatur } \frac{I+I'+I''+I'''}{4} = i' \quad \frac{I''-I}{2} = m \quad \frac{I'''-I'}{2} = n \\ \text{tg}m.\text{tg}n = \text{tg}p \qquad \sin 2i'.\sin 2q = h\cos H \\ \frac{\text{tg}\,n}{\text{tg}m} = \text{tg}q \qquad \cos 2i'.\sin 2p = h\sin H \\ \frac{\sin 2p \sin 2q}{h} = \sin F. \\ \text{eritque} \quad i = i' - \frac{H-F}{2} \end{matrix}\right\} \ldots \qquad (6)$$

neglecto scilicet errore qui proxime exhibetur per:

$$\frac{f+f'+f''+f'''}{4} - \frac{\varkappa\lambda}{2}\cos i.\cos P,$$

$$\text{pro } k = \varkappa(1-\tfrac{1}{2}\lambda) \; k' = \varkappa(1+\tfrac{1}{2}\lambda). - \qquad (7)$$

Ita e. g. pro eo de quo supra dixi inclinatorio, idonea computandi ratio eligetur, substituendo in (5) et (7): $K \leqq 3'$, $\lambda \leqq \frac{1}{25}$.